数学Ⅲ　ヤマシート　No．3－7　＜**無限等比級数**は、収束条件「$-1<r<1$（または $a=0$）」と、和 $\dfrac{a}{1-r}$ を押さえれば楽勝！＞　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

＜到達目標＞　自分の習得状況を定期的にチェックせよ。

☐ 1　初項 a、公比 r、項数 n の等比数列の初項から第 n 項までの和の公式を覚えている

☐ 2　無限等比級数の収束条件と、収束するときの和について説明できる

☐ 3　循環小数は無限等比級数であることを理解し、分数で表すことができる

＜次は有名な「**無限等比級数**」について考えましょう。これは、$\{r^n\}$ の極限の復習も兼ねます！＞

1　次の無限等比級数の収束・発散を調べ，収束するときは，その和 S を求めよ。

(1)　$3+6+12+24+48+\cdots\cdots$

初項 3、公比 2 より

公比について $|2|>1$ なので、

発散する.

(2)　$10+5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\frac{5}{8}+\cdots\cdots$

(3)　$3-\sqrt{3}+1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}-\cdots\cdots$

公比が分かりにくいときは分かり易いところで考える

初項 3、公比 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ より

公比について $\left|-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|<1$ なので

収束して 和 $S=\dfrac{3}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2}$

(4)　$1+3+9+27+\cdots\cdots$

(5)　$-8+4-2+\cdots\cdots$

(6)　$\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+\cdots\cdots$

(7)　$-3+3-3+3-\cdots\cdots$

(8)　$(3+\sqrt{2})+(2\sqrt{2}-1)+(5-3\sqrt{2})+\cdots\cdots$

パッと見ても公比が分からないときは割り算する.

公比 $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3+\sqrt{2}}=\dfrac{(2\sqrt{2}-1)(3-\sqrt{2})}{7}=\dfrac{-7+7\sqrt{2}}{7}$

$=-1+\sqrt{2}$.

(9)　$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\cdots\cdots$

(10)　$1+0.9+0.81+\cdots\cdots$

(11)　$27-9+3-\cdots\cdots$

(12)　$2+2\sqrt{3}+6+\cdots\cdots$

(13)　$(2-\sqrt{2})+(3\sqrt{2}-4)+(10-7\sqrt{2})+\cdots\cdots$

＜Σ記号で表されても対応できるように。＞

2　次の無限級数の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

無限等比級数とは言ってないので，そこを明言する

これは初項 1、公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数なので，

公比について $\left|\frac{1}{3}\right|<1$ より 収束して.

和は $\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

(4)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$

(5)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{5^n}\right)$

$\displaystyle=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n.$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ は 初項 $\frac{1}{2}$、公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数で，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ は 初項 $\frac{1}{5}$、公比 $\frac{1}{5}$ の　〃

それぞれ別々に説明が必要

それぞれ公比について $\left|\frac{1}{2}\right|<1$、$\left|\frac{1}{5}\right|<1$ なので

収束するので、和は

$\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

(6)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-(-1)^n}{4^n}$

(7)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$

$\displaystyle=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{6^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{6^n}$

$\displaystyle=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

以下同じ.

(8)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{5^n}$

数学Ⅲ　ヤマシート　No．3－7　<**無限等比級数**は、収束条件「$-1<r<1$（**または** $a=0$）」と、**和** $\dfrac{a}{1-r}$ を押さえれば楽勝！>　（　）組（　）番　名前（　）

<「無限等比**数列**」と「無限等比**級数**」の収束条件を間違わないように！！>

3　次の問いに答えよ。

(1)　$1+2x+4x^2+8x^3+\cdots\cdots$

が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また，そのときの和 S を求めよ。

初項 1、公比 $2x$ の無限等比級数なので．

収束条件は．$|2x|<1$

$-1<2x<1$

$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

和は．$\dfrac{1}{1-2x}$

(2)　$1-\dfrac{x}{3}+\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{x^3}{27}+\cdots\cdots$

が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また，そのときの和 S を求めよ。

<数Ⅰで学習した「**循環小数**」は、実は無限等比級数なのです！>

4　次の循環小数を分数で表せ。

(1)　$0.\dot{3}$ $= 0.3333\cdots\cdots$

$= 0.3+0.03+0.003+0.0003+\cdots\cdots$

初項 0.3、公比 0.1 の無限等比級数

公比について $|0.1|<1$ より収束して．

$0.\dot{3} = \dfrac{0.3}{1-0.1} = \dfrac{0.3}{0.9} = \dfrac{1}{3}$

(2)　$0.\dot{2}\dot{1}$ $= 0.212121\cdots\cdots$

$= 0.21+0.0021+0.000021+\cdots\cdots$

初項 0.21、公比 0.01 の無限等比級数

公比について $|0.01|<1$ より収束して

$0.\dot{2}\dot{1} = \dfrac{0.21}{1-0.01} = \dfrac{0.21}{0.99} = \dfrac{7}{33}$

(3)　$1.\dot{3}\dot{6}$

(4)　$3.2\dot{1}\dot{8}$

$= 3.2+0.018+0.00018+0.0000018+\cdots\cdots$

$0.018+0.00018+0.0000018+\cdots\cdots$ は．

初項 0.018，公比 0.01 の無限等比級数．

，公比について．$|0.01|<1$ より収束して．

$3.2\dot{1}\dot{8} = 3.2+\dfrac{0.018}{1-0.01}$

$= 3.2+\dfrac{0.018}{0.99}$

$= \dfrac{32}{10}+\dfrac{18}{990} = \dfrac{32}{10}+\dfrac{2}{110} = \dfrac{177}{55}$

(5)　$2.\dot{0}2\dot{9}-1.\dot{4}7\dot{3}$

解答

1　(1) 発散　(2) 20　(3) $\dfrac{9-3\sqrt{3}}{2}$　(4) 発散　(5) $-\dfrac{16}{3}$　(6) 発散　(7) 発散

(8) $\dfrac{8+5\sqrt{2}}{2}$　(9) $-\dfrac{2}{3}$　(10) 10　(11) $\dfrac{81}{4}$　(12) 発散　(13) 1

2　(1) $\dfrac{3}{2}$　(2) $\dfrac{12}{5}$　(3) $\dfrac{5}{2}$　(4) $6(2+\sqrt{3})$　(5) $\dfrac{3}{4}$　(6) $\dfrac{16}{5}$　(7) $\dfrac{3}{2}$　(8) $\dfrac{1}{2}$

3　(1) $-\dfrac{1}{2}<x<-1$，$S=\dfrac{1}{1-2x}$　(2) $-3<x<3$，$S=\dfrac{3}{3+x}$

4　(1) $\dfrac{1}{3}$　(2) $\dfrac{7}{33}$　(3) $\dfrac{15}{11}$　(4) $\dfrac{177}{55}$　(5) $\dfrac{5}{9}$